ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ МЕГАПОЛИС

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Инженерный класс в московской школе

НАПРАВЛЕНИЕ КОСМИЧЕСКИЕ КЛАССЫ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЭТАП

МОСКВА
2025

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ РАЗРАБОТАНЫ:

Куприн Андрей Валентинович, старший преподаватель кафедры "Математический анализ" Московского технического университета связи и информатики

Райцин Аркадий Михайлович, доктор технических наук, с.н.с., профессор Московского технического университета связи и информатики

Лакерник Александр Рафаилович, кандидат физико-математических наук, доцент Московского технического университета связи и информатики

Халабия Рустам Фарук, кандидат технических наук, доцент Московского технического университета связи и информатики

Степанова Ирина Владимировна, кандидат геолого-минералогических наук, доцент Московского технического университета связи и информатики

Каравашкина Валентина Николаевна, кандидат технических наук, доцент Московского технического университета связи и информатики

Загвоздкина Анна Викторовна, старший преподаватель кафедры "Информатика" Московского технического университета связи и информатики

МОСКВА
2025

Оглавление

ПРЕДМЕТ «ИНФОРМАТИКА»

Задание №1

Учёные, работающие на лунной станции, обмениваются между собой текстовыми сообщениями. Для дополнительной защиты передаваемых данных учёные договорились использовать модифицированный шифр Цезаря. В этом шифре в качестве ключа используется некоторое дополнительное слово. Для шифрования текста каждая буква исходного сообщения заменяется на букву, код которой равен сумме: номера кодируемой буквы и номера соответствующей буквы ключа.

Нумерация букв алфавита представлена на рисунке. Пробелы и знаки препинания не учитывались. Если при сложении номеров получалось число, превышающее максимальный номер символа в алфавите (в данном шифре это 33), то из полученного числа вычитался максимальный номер.

Исходное сообщение: МЫЕДЕМВМОРЕДОЖДЕЙ

Полученное сообщение: ХЮКМЙНКРФЩЙЕЧЙЙНО

При шифровании ученый допустил одну ошибку (одна буква была один раз зашифрована неправильно). Определите, какое слово являлось ключом. Ответ вводить заглавными буквами без пробелов.

Решение:

В классическом шифре Цезаря шифрование сообщения проводилось путём замены букв исходного сообщения на буквы, находящиеся в алфавите на три позиции левее. В модифицированном варианте шифра Цезаря величина смещения буквы при шифровании переменна и задаётся словом-ключом. Всем буквам алфавита присваиваются числовые коды (в данной задаче эти коды заданы на рисунке в задании). При шифровании исходное сообщение выписывается в строчку, причём рядом с каждой буквой пишется её код. Ниже в строчку (буква под буквой) выписывается слово-ключ (также с кодами для всех букв). Если слово-ключ короче, чем шифруемое сообщение, то его повторяют несколько раз. Далее для каждой буквы исходного сообщения складывается её код и код записанной ниже буквы из слова-ключа. Если при сложении получается число, превышающее максимальный номер символа в алфавите, то из полученного числа вычитается этот максимальный номер.

Буквы исходного сообщения	С	О	Б	Ы	Т	И	Е
Коды букв исходного сообщения	19	16	2	29	20	10	6
Буквы слова-ключа	Ш	И	Ф	Р	Ш	И	Ф
Коды букв слова-ключа	26	10	22	18	26	10	22
Сумма кодов	45	26	24	47	46	20	28
Коды букв зашифрованного сообщения	12	26	24	14	13	20	28
Буквы зашифрованного сообщения	К	Ш	Ц	М	Л	Т	Ъ

Таким образом, для получения зашифрованного сообщения нужно знать исходное сообщение и слово-ключ. И наоборот, для получения исходного сообщения надо знать зашифрованное сообщение и слово-ключ. При наличии зашифрованного и исходного сообщений можно попытаться получить слово-ключ.

В рассматриваемом задании надо определить слово-ключ. Для этого надо из кодов букв зашифрованного сообщения вычесть коды букв исходного сообщения. Полученные числа (если они положительные и не равны нулю) и будут кодами букв слова-ключа. Если в результате вычитания получается отрицательное число или ноль, то к результату надо прибавить максимальный номер символа в алфавите (в данном примере это число 33).

Сначала выпишем числовые коды букв зашифрованного сообщения:

Х	Ю	К	М	Й	Н	К	Р	Ф	Щ	Й	Е	Ч	Й	Й	Н	О
23	32	12	14	11	15	12	18	22	27	11	6	25	11	11	15	16

Затем выпишем числовые коды букв исходного сообщения:

М	Ы	Е	Д	Е	М	В	М	О	Р	Е	Д	О	Ж	Д	Е	Й
14	29	6	5	6	14	3	14	16	18	6	5	16	8	5	6	11

Найдём разницу в числовых кодах и переведём её в буквы.

коды букв зашифрованного сообщения	23	32	12	14	11	15	12	18	22	27	11	6	25	11	11	15	16
коды букв исходного сообщения	14	29	6	5	6	14	3	14	16	18	6	5	16	8	5	6	11
разность (коды букв слова-ключа)	9	3	6	9	5	1	9	4	6	9	5	1	9	3	6	9	5
буквы слова-ключа	**З**	**В**	**Е**	**З**	**Д**	**А**	З	***Г***	Е	З	Д	А	З	В	Е	З	Д

Так как слово-ключ обычно значительно короче шифруемых сообщений, то нам надо искать повторяющуюся последовательность букв. Заметим, что могут встречаться и ситуации, когда слово-ключ будет длиннее шифруемой фразы, но в таких случаях полностью восстановить слово-ключ невозможно, поэтому в заданиях на поиск слова-ключа таких случаев нет.

Также надо не забывать, что по условиям рассматриваемой задачи в одном месте была допущена ошибка.

Из полученной таблицы видно, что более двух раз повторяется слово ЗВЕЗДА (один раз с ошибкой – вместо буквы «В» стоит буква «Г»).

Ответ: ЗВЕЗДА.

Возможные трудности при выполнении задания №1:

- необходимо внимательно читать условие задания конкретного варианта, обращая внимание на используемый алфавит, коды букв/знаков препинания, возможные дополнительные условия и ограничения;

- при вводе ответа следует обратить внимание на требуемый формат ввода (в рассматриваемом примере ответ надо вводить заглавными буквами без пробелов).

За правильно выполненное задание №1 можно получить 5 баллов.

Задание № 2

Космическая лунная станция получает команды по четырем каналам связи: X1, X2, X3, X4. На основе этих команд она вырабатывает сигнал (Y1, Y2, Y3) для управления луноходом. Логика обработки команд известна и представлена следующими логическими уравнениями:

$Y1=\neg(\neg(X1\wedge\neg X2)\rightarrow\neg(X3\wedge X4\wedge\neg X1))$;

$Y2 = \neg X1\wedge X2\wedge X3\wedge X4\vee\neg(X1\wedge X2\rightarrow\neg X3\wedge X4)$;

$Y3=(X1\vee\neg X2)\rightarrow(X3\wedge X4\wedge X2)$.

Определите, при каких значениях входных сигналов X1, X2, X3, X4, луноход получит управляющий сигнал 111. При вводе ответа перечислите подряд значения на каждом из входов (без запятых и пробелов).

Решение.

Управляющий сигнал 111 получается при комбинации выходных сигналов Y1=1, Y2=1 и Y3=1. Для решения задания надо построить таблицы истинности для всех трёх логических функций (Y1, Y2, Y3).

При построении таблиц истинности надо помнить порядок выполнения логических операций: сначала выполняется инверсия, затем конъюнкция, затем дизъюнкция, а затем импликация и эквивалентность. Для изменения указанного порядка выполнения логических операций используются скобки.

Построим таблицу истинности для Y1.

X1	X2	X3	X4	X1∧¬X2	¬(X1∧¬X2)	X3∧X4	X3∧X4∧¬X1	¬(X3∧X4∧¬X1)	¬Y1	Y1
0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0
0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0
1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0

Затем построим таблицу истинности для Y2.

X1	X2	X3	X4	¬X1∧X2∧X3∧X4	X1∧X2	¬X3∧X4	X1∧X2→¬X3∧X4	Y2
0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	0	0	1	0
1	0	1	1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	1	1	1	0
1	1	1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	0	1	0	0	1

Теперь построим таблицу истинности для Y3.

X1	X2	X3	X4	¬X2	X1∨¬X2	X3∧X4∧X2	Y3
0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	0	1	1	1

И сведём для наглядности полученные данные в одну таблицу.

X1	X2	X3	X4	Y1	Y2	Y3
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	0	1
0	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	0	0	0	0	0	0

1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1	1

Как видно из полученной таблицы, комбинация выходных сигналов Y1=1, Y2=1 и Y3=1 возникает только при комбинации входных сигналов X1=0, X2=1, X3=1, X4=1.

Ответ: 0111.

Возможные **трудности** при выполнении задания №2:

- при решении обращайте внимание на порядок выполнения логических операций;

- при вводе ответа обратите внимание на требуемый формат ввода (значения перечисляются подряд без запятых и пробелов).

За правильно выполненное задание №2 можно получить 5 баллов.

Задание № 7

Микроконтроллер модели лунохода работает с двоичными вещественными числами, представленными в нормализованном виде в четырех байтовом формате. Под нормализованной формой вещественного двоичного числа понимаем:

$X = s\ M\ 2^n$,

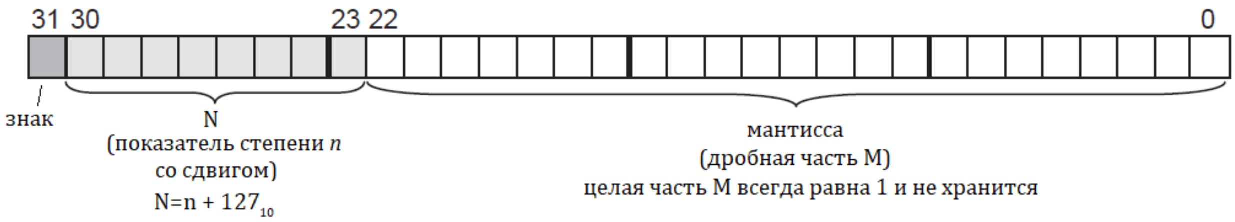
где: s – знак числа,

M – значащая часть числа, $1 \le M < 2$,

n – показатель степени.

32 бита, отводимые на хранение числа, разделяются на три зоны: для хранения знака, показателя степени и мантиссы (на рисунке выделены разным цветом). Один бит отводится на хранение информации о знаке числа. Для записи показателя степени отводится восемь бит. Причём показатель степени n записывается со сдвигом:

$N=n+127_{10}$. На хранение дробной части M (т.е. мантиссы) отводится 23 бита (целая часть M всегда равна 1 и в памяти не хранится).



На вход микроконтроллера поступили два числа. Микроконтроллер выполнил их сложение и сохранил результат в памяти. В десятичном виде эти два числа записываются как: 1.25_{10} и 2.25_{10}. Определите, как результат вычислений должен выглядеть в памяти микроконтроллера. При вводе ответа значения битов внутри каждой зоны вводятся подряд (без пробелов и разделителей), а между зонами ставится пробел (один пробел ставится между битом знака и старшим битом показателя степени, второй пробел – между младшим битом показателя степени и старшим битом мантиссы), младшие биты в записи располагаются правее старших (как на рисунке выше). В случае необходимости округление проводить усечением (отбрасыванием младших разрядов) мантиссы.

Пример формата ввода ответа: 0 00111111 00000000000000000010010.

Решение:

1. В первую очередь надо перевести десятичные числа 1.25_{10} и 2.25_{10} в двоичную систему счисления.

Для перевода вещественного числа из десятичной в двоичную систему счисления необходимо осуществить перевод целой части числа и перевод дробной части этого же числа по отдельности**.**

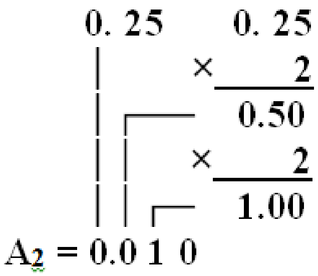
Согласно общему правилу, перевод *целых* чисел из одной системы счисления с основанием C_1 в другую с основанием C_2 осуществляется путем последовательного *деления* числа A_{C1} на основание C_2, записанное в виде числа с основанием C_1, до получения остатка. Полученное частное следует вновь делить на основание C_2, и этот процесс надо повторять до тех пор, пока частное не станет меньше делителя. Полученные остатки от деления и последнее частное записываются в порядке, обратном полученному при делении. Сформированное число и будет являться числом с основанием C_2.

Дробное число с основанием C_1 переводится в систему счисления с основанием C_2 путем последовательного *умножения* числа A_{C1} на основание C_2, записанное в виде числа с основанием C_1. При каждом умножении целая часть произведения берется в виде очередной цифры соответствующего разряда, а оставшаяся дробная часть принимается за новое множимое. Число умножений определяет разрядность полученного результата, представляющего число A_{C1}, в системе счисления C_2.

Покажем перевод заданного числа 1.25_{10} в двоичную систему:

Целая часть числа совпадает в обеих системах $1_{10}=1_2$.

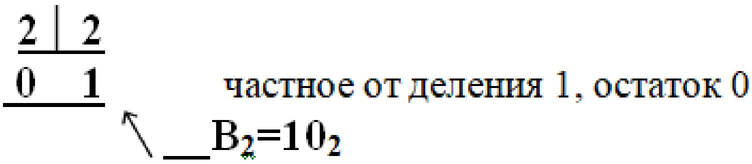
Дробная часть 0.25_{10} :   т.е. $A_{10}=0.25_{10}$, надо найти $A_2=?$



Объединяя целую и дробную части и получим $\mathbf{1.25_{10}=1.01_2}$

Теперь переведем второе заданное число 2.25_{10} в двоичную систему:

Целая часть: $B_{10}=2$, $B_2=?$



Перевод дробной части для обоих чисел одинаков.

Получили два числа в двоичной системе:

$A=1.25_{10} =1.01_2$

$B=2.25_{10} =10.01_2$

2. Теперь необходимо представить оба числа в нормализованном виде IEEE 754 (single-precision)

Вещественные числа хранятся в памяти компьютера в формате с плавающей запятой в нормализованном виде. Нормализованным называется такое представление вещественного числа с плавающей запятой, при котором значащая часть числа M удовлетворяет условию $1 \le M<C$, где C – основание системы счисления, т.е. в двоичной системе вещественное число будет храниться в виде $X= \pm M \cdot 2^n$, причем $1 \le M <2$. Т.е. число можно записать следующим образом:

$X = s\ M\ 2^n$,

где: s – знак числа,

M – значащая часть числа, $1 \le M<2$,

n – показатель степени (порядок).

В отличие от целых чисел, значащая часть вещественных чисел всегда хранится в прямом коде, причем двоичная значащая часть нормализованного вещественного числа всегда (за исключением нуля!) начинается с единицы, т.к. $1 \le M<2$. Поэтому во многих компьютерах эта так называемая «скрытая единица» не хранится в оперативной памяти, что позволяет сэкономить один дополнительный разряд значащей части числа. То есть, значащие части положительного и равного по модулю отрицательного числа одинаковы, а отличаются они только одним старшим (знаковым) битом s.

Остается вспомнить, как закодировать двоичный порядок (показатель степени n). Порядок *n* – это целое число со знаком. Чтобы не хранить знака порядка, используется *кодирование со смещением:* к порядку добавляют некое положительное смещение (сдвиг) *d*. Сдвиг *d* подбирается так, чтобы число $N=n+d$ было всегда положительным. Величину сдвига можно получить по формуле $\mathbf{2^{p-1} - 1}$, где **p** – число бит, отведенное на хранение порядка.

Для кодирования порядка в числах одинарной точности (типа single, float) используют сдвиг $d=127_{10}=7F_{16}$. То есть, чтобы получить актуальное значение порядка нужно вычесть из него сдвиг.

В рассматриваемом примере используется число одинарной точности – компьютерный формат представления чисел, занимающий в памяти одно машинное слово (в случае 32-битного компьютера – 32 бита или 4 байта). Используется для работы с вещественными числами везде, где не нужна очень высокая точность. Порядок записывается со сдвигом $\mathbf{127_{10}}$.

Знак	N (порядок со сдвигом) (8 бит)		Значащая часть числа (23+1 бит)
0	0 0 0 0 0 0 0 0	1,	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
	30 … 23		22 … 0

Представление 32-разрядного двоичного числа в формате с плавающей запятой и с нормализованной мантиссой

Напомним, что так называемая «белая» (скрытая) единица, показанная между 22 и 23 разрядом, подразумевается, но в записи числа (хранении) не участвует.

Алгоритм получения представления вещественного числа в памяти компьютера (для одинарной точности):

Шаг 1. Перевести модуль числа в двоичную систему счисления.

Шаг 2. Нормализовать двоичное число, т.е. записать его в виде $M \times 2^p$, где M – мантисса (ее целая часть равна 1_2) и p – порядок, записанный в десятичной системе счисления;

Шаг 3. Прибавить к порядку смещение и перевести смещенный порядок в двоичную систему счисления;

Шаг 4. Дописать слева знак всего числа (0 – положительное; 1 – отрицательное).

Рассмотрим для нашей задачи сначала для числа А.

Шаги 1 и 2. Первое число $A = 1.25_{10} = 1.01_2$ после перевода в двоичную систему получилось сразу в нормализованном виде 1.01×2^0 (шаги 1 и 2 алгоритма выполнены).

Шаг 3. Получаем код со сдвигом для порядка и переводим в двоичную систему $0+127=127_{10}= 1111111_2$.

Шаг 4. Т.к. число положительное, в знаковый разряд s записываем ноль.

Получаем для первого числа

Знак	N (порядок со сдвигом) (8 бит)		Значащая часть числа (23+1 бит)
0	0 1 1 1 1 1 1 1	1,	0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
	30 … 23		22 … 0

Т.е. первое число А хранится в виде:

0 01111111 01000000000000000000000

Второе число $B=2.25_{10}$

Шаг 1. $2.25_{10} = 10.01_2$

Шаг 2. Нормализуем $10.01_2 = 1.001 \times 2^1$

Шаг 3. Получаем код со сдвигом для порядка и переводим в двоичную систему $1+127=128_{10}= 10000000_2$.

Шаг 4. Т.к. число положительное, в знаковый разряд s записываем ноль.

Получаем для второго числа

Знак	N (порядок со сдвигом) (8 бит)		Значащая часть числа (23+1 бит)
0	1 0 0 0 0 0 0 0	1,	0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
	30 … 23		22 … 0

Т.е. второе число хранится в виде:

0 10000000 00100000000000000000000

3. Выполним сложение двух вещественных чисел.

При сложении и вычитании сначала производится подготовительная операция, называемая *выравниванием порядков до большего*. В процессе выравнивания порядков мантисса числа с меньшим порядком сдвигается в своем регистре вправо на количество разрядов, равное разности порядков операндов. После каждого сдвига порядок увеличивается на единицу.

В результате выравнивания порядков одноименные разряды чисел оказываются расположенными в соответствующих разрядах обоих регистров, после чего мантиссы складываются или вычитаются.

В случае необходимости полученный результат нормализуется путем сдвига мантиссы результата влево. После каждого сдвига влево порядок результата уменьшается на единицу.

Выполняем:

1) Выравниваем порядки.

Число А имеет порядок n = 0, число В – порядок n = 1.

Переведём А к порядку 1, сдвинув мантиссу на 1 разряд вправо:

$A=1.01_2\times2^0=0.101_2\times2^1$

2) Сумма мантисс:

$$\begin{array}{r} 0,101\ \times2^1 \\ +\ \underline{1,001\ \times2^1} \\ 1,110\ \times2^1 \end{array}$$

Формируем результат по вышеприведенному алгоритму.

Шаг 1. Сумма в двоичном виде равна $1.11_2 \times 2^1$

Шаг 2. Нормализуем полученный результат. Сумма равна $11.11_2 \times 2^1$, т.е. результат суммы получился уже в нормализованном виде, т.к. старший бит равен 1. Мантисса нормализована. Теперь записываем мантиссу в 23 бита. Не забываем, что при написании мантиссы отбрасываем старшую единицу, т.е. из 11.11_2 остаётся только дробная часть .11.

Заполняем до 23 бит: 1100000000000000000000.

Шаг 3. Вычисление смещенного порядка. Истинный показатель порядка n = 1, следовательно смещённый $N = 1_{10} + 127_{10} = 128_{10} = 10000000_2$.

Шаг 4. Результат суммы – положительное число, значит в старший знаковый разряд запишем ноль.

Формируем 32-битное слово результата

Знак: 0

Показатель: 10000000

Мантисса: 1100000000000000000000

Ответ: 0 10000000 1100000000000000000000

Возможные **трудности** при выполнении задания №7:

- необходимо обратить внимание на знаки чисел и на выполняемое с ними действие микроконтроллером;

- выравнивание порядков до большего;

- при вводе ответа обратите особое внимание на требуемый формат ввода.

За правильно выполненное задание №7 можно получить 8 баллов.

ПРЕДМЕТ «МАТЕМАТИКА»

Задание № 3

Контролируемые требования: знание формул сокращенного умножения, умение выполнять преобразования алгебраических выражений.

Уровень сложности: базовый.

Ответ: вводится в виде целого числа.

Оценка: 4 балла за совпадение ответа с эталонным, иначе 0 баллов.

При решении используются формулы сокращенного умножения:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $\quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; $\quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Необходимо, зная уравнение, которому удовлетворяет число *x*, найти некоторую рациональную функцию этого числа.

Рассмотрим **задачу №3** демонстрационного варианта.

Найдите значение выражения $\left(1-\frac{1}{x}\right)^3$*, где x – корень уравнения* $3x^3+3x^2-3x+1=0$.

Авторское решение:

Перепишем уравнение следующим образом:

$$4x^3 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1 = 0;\ 4x^3 - (x-1)^3 = 0;\ 4x^3 = (x-1)^3.$$

Отсюда $\frac{(x-1)^3}{x^3} = \left(\frac{x-1}{x}\right)^3 = \left(1-\frac{1}{x}\right)^3 = 4$.

Ответ: 4

В приведенном решении ключевым моментом является умение заметить слагаемые, входящие в разложение куба разности $(x - 1)^3$ по степеням x. Метод решения аналогичен выделению полного квадрата, используемый для решения квадратных уравнений. Отметим, что точное значение единственного действительного корня этого уравнения равно:

$$\frac{1}{1-\sqrt[3]{4}}.$$

Поэтому попытка найти решение этого уравнения по правилу поиска целого или рационального корня не приведет к успеху.

Задание №3 относится к базовому уровню и требует небольшого времени для решения. Однако разглядеть полный куб при некоторых значениях коэффициентов уравнения может оказаться непростой задачей, поэтому приведем **другой способ**, основанный на методе замены переменной.

А именно, обозначим

$$1-\frac{1}{x}=t.$$

Тогда нужно определить значение t^3.

Выразим x через t: $x=\dfrac{1}{1-t}$.

Подставим это выражение в уравнение, получим

$$\frac{3}{(1-t)^3}+\frac{3}{(1-t)^2}-\frac{3}{1-t}+1=0.$$

Приведем левую часть равенства к общему знаменателю:

$$\frac{3+3(1-t)-3(1-t)^2+(1-t)^3}{(1-t)^3}=0.$$

Раскроем скобки в числителе, приведем подобные слагаемые и приравняем числитель к нулю:

$$3+3-3t-3(1-2t+t^2)+1-3t+3t^2-t^3=0,\ 4-t^3=0.$$

Отсюда сразу получается ответ $t^3 = 4$.

Такой способ требует больше времени для преобразований, но при этом формулы сокращенного умножения применяются непосредственно для раскрытия, а не для выделения полного куба, что для большинства учащихся является более привычным математическим навыком.

Рассмотрим еще один **пример**.

Найдите значение выражения

$x\left(1-\frac{2}{x}\right)^3$, *где* x *– корень уравнения* $x^3-3x^2+12x-8=0$.

Решение:

Обозначим $x\left(1-\frac{2}{x}\right)^3=t$.

После преобразования по формуле куба разности получим

$$t=x\left(1-3\cdot\frac{2}{x}+3\cdot\frac{4}{x^2}-\frac{8}{x^3}\right)=\frac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2}.$$

По условию x удовлетворяет уравнению

$x^3-3x^2+12x-8=0$, откуда $x^3+12x-8=3x^2$.

Следовательно, $t=\frac{(x^3+12x-8)-6x^2}{x^2}=\frac{3x^2-6x^2}{x^2}=-3$.

Ответ: – 3

Замечание. Очевидно, $x\neq 0$, поэтому выражение, значение которого надо найти, определено для всех корней уравнения

$x^3-3x^2+12x-8=0$.

Кроме того, это уравнение имеет единственный действительный корень, поскольку функция $f(x)=x^3-3x^2+12x-8$ возрастает на всей числовой прямой. Действительно, $f'(x)=3x^2-6x+12>0$ при всех $x\in(-\infty,+\infty)$.

Впрочем, приведенный способ решения использует только уравнение, которому удовлетворяет x, а не само значение x. Если бы корней было несколько, все они привели бы к одному и тому же ответу

Типичные ошибки при решении этого задания обусловлены нетвердым знанием формул сокращенного умножения и невнимательности в ходе приведения подобных слагаемых.

Задание №4

Контролируемые требования: знание правил сравнения по модулю, умение решать линейные уравнения в целых числах и производить отбор полученных решений.

Уровень сложности: базовый.

Ответ: вводится в виде целого числа.

Оценка: 4 балла за совпадение ответа с эталонным, иначе 0 баллов.

При выполнении задания №4 следует свести условие задачи к поиску целых решений линейного уравнения с целочисленными коэффициентами с дальнейшим отбором решений, удовлетворяющих данному неравенству.

Рассмотрим **задачу №4** демонстрационного варианта.

Сообщение, передаваемое по каналу связи, разбито на пакеты и закодировано целым числом $222 \leq N \leq 250$. *Для контроля целостности пакета разными алгоритмами получены контрольные суммы 2 и 1, являющиеся остатками от деления числа* N *на числа 3 и 5 соответственно*

($N \equiv 2 \pmod 3$, $N \equiv 1 \pmod 5$*). Найдите значение числа* N.

Авторское решение:

По условию задачи $N = 3k + 2$ и $N = 5p + 1$, $k, p \in Z$

Для решения задачи надо решить систему в целых числах относительно

k, p, N: $\begin{cases} N = 3k+2, \\ N = 5p+1, \\ 222 \leqslant N \leqslant 250. \end{cases}$ Из первых двух уравнений системы следует, что

$$3k + 2 = 5p + 1 \Rightarrow 5p - 3k = 1. \qquad (*)$$

Уравнение имеет бесконечно много решений, которые можно найти, подобрав сначала одно любое решение k_0, p_0. Например, $p_0 = 2$, $k_0 = 3$.

Тогда имеем тождество

$$5p_0 - 3k_0 = 1. \qquad (**)$$

Вычитая из (*) тождество (**), получим

$$5(p-p_0) - 3(k-k_0) = 0 \Rightarrow 5(p-p_0) = 3(k-k_0) \Rightarrow p - p_0 = 3t, k - k_0 = 5t, t \in Z.$$

Все решения данного уравнения можно записать в виде

$$p = p_0 + 3t = 2 + 3t, k = k_0 + 5t = 3 + 5t, \; t \in Z.$$

Тогда для исходной системы получим

$$\begin{cases} N = 3k + 2 = 3(3+5t) + 2 = 15t + 11, \\ N = 5p + 1 = 5(2+3t) + 1 = 15t + 11,, \; t \in Z. \\ 222 \leqslant N \leqslant 250. \end{cases}$$

Перепишем двойное неравенство в системе, подставив выражение N через t: $222 \le 15t + 11 \le 250$, $211 \le 15t \le 239$, откуда следует единственное целое решение $t = 15$.

Следовательно, $N = 236$.

Ответ: 236

Уровень задания базовый, тем не менее, учащемуся необходимо верно понять условие и свести его к постановке стандартной алгебраической задачи. Отметим, что подобные примеры традиционно включаются в различные задачники и пособия по элементарной математике. Например, в формулировке «найдите числа, дающие при делении на некоторые целые числа известные остатки», «найдите сумму чисел, являющихся членами нескольких известных арифметических прогрессий» и т. п.

Линейные диофантовы уравнения не входят в базовую часть школьной программы по математике, поэтому данное задание составлено таким образом, чтобы решение можно было получить за короткое время непосредственным перебором. Приведем **второй способ** решения.

По условию, число N при делении на 5 дает остаток 1. В интервале $222 \le N \le 250$ таких чисел всего пять: 226, 231, 236, 241, 246. При делении на 3 их остатки 1, 0, 2, 1, 0 (это можно проверить непосредственно или, не выполняя деления, найти остаток от деления суммы цифр каждого числа на 3). Таким образом, $N = 236$.

Задание №8

Контролируемые требования: знание графика линейной функции, формул площади треугольника, трапеции и параллелограмма, умение изображать на координатной плоскости множества решений системы линейных неравенств, определять координаты точки пересечения прямых, вычислять площадь многоугольника с заданными координатами вершин.

Уровень сложности: повышенный.

Ответ: вводится в виде целого числа.

Оценка: 10 баллов за совпадение ответа с эталонным, иначе 0 баллов.

При решении задания №8 разрешается использование интернет-ресурса Desmos (https://www.desmos.com/?lang=ru) для построения графиков, визуализации функций и анализа данных. Остальные задания выполняются без применения дополнительных онлайн-ресурсов.

В ходе решения необходимо изобразить на координатной плоскости множество решений неравенств вида $|a_1x + b_1y + c_1| + |a_2x + b_2y + c_2| \le d$ и $ax + by + c \ge 0$ (или ≤ 0).

Предполагается, что в первом неравенстве

$$\frac{a_1}{a_2} \ne \frac{b_1}{b_2},$$

т.е. прямые $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ не параллельны.

Неравенство $ax + by + c \ge 0$ определяет полуплоскость, расположенную по ту или другую сторону от прямой $ax + by + c = 0$.

Неравенство $|a_1x + b_1y + c_1| + |a_2x + b_2y + c_2| \le d$ сводится к системе четырех линейных неравенств. Для раскрытия модуля используем утверждение:

$|f(x)| \leqslant g(x)$ тогда и только тогда, когда $\begin{cases} f(x) \leqslant g(x), \\ f(x) \geqslant -g(x). \end{cases}$

Положим $f(x) = a_1x + b_1y + c_1$, $g(x) = d - |a_2x + b_2y + c_2|$ и сведем неравенство к системе $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 \leqslant d - |a_2x + b_2y + c_2|, \\ a_1x + b_1y + c_1 \geqslant |a_2x + b_2y + c_2| - d. \end{cases}$ Уединим модули в обоих неравенствах: $\begin{cases} |a_2x + b_2y + c_2| \leqslant d - a_1x - b_1y - c_1, \\ |a_2x + b_2y + c_2| \leqslant a_1x + b_1y + c_1 + d. \end{cases}$ Каждое из двух полученных неравенств имеет вид $|f(x)| \leqslant g(x)$ и может быть сведено к системе двух неравенств, в результате чего получим систему четырех неравенств

$$\begin{cases} a_2x + b_2y + c_2 \leqslant d - a_1x - b_1y - c_1, \\ a_2x + b_2y + c_2 \geqslant a_1x + b_1y + c_1 - d, \\ a_2x + b_2y + c_2 \leqslant a_1x + b_1y + c_1 + d, \\ a_2x + b_2y + c_2 \geqslant -a_1x - b_1y - c_1 - d. \end{cases}$$

После приведения подобных слагаемых:

$$\begin{cases} (a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2)y + c_1 + c_2 - d \leqslant 0, \\ (a_2 - a_1)x + (b_2 - b_1)y + c_2 - c_1 + d \geqslant 0, \\ (a_2 - a_1)x + (b_2 - b_1)y + c_2 - c_1 - d \leqslant 0, \\ (a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2)y + c_1 + c_2 + d \geqslant 0. \end{cases}$$

Полученная система определяет параллелограмм. Зная принцип сведения неравенства $|f(x)| \leqslant g(x)$ к системе, достаточно в исходном неравенстве $|a_1x + b_1y + c_1| + |a_2x + b_2y + c_2| \le d$ каждый модуль раскрыть со знаком «плюс» или «минус» – при этом получим как раз те четыре неравенства, которые образуют систему, определяющую параллелограмм.

Если $a_1 = \pm a_2$ и при этом $b_1 = \mp b_2$ (чтобы выполнялось условие $\dfrac{a_1}{a_2} \ne \dfrac{b_1}{b_2}$), то получаем частный случай параллелограмма, а именно, прямоугольник.

В задании №8 требуется найти, какая часть площади прямоугольника оказалась выше (или ниже) некоторой прямой. Рассмотрим **задачу №8** демонстрационного варианта.

Искусственный спутник ведет наблюдение за объектом, заданным на координатной плоскости неравенством $|5x+4y-38|+|5x-4y-22|\leqslant 40$. *Зона обзора камер, установленных на спутнике, описывается условием* $y+2x-15\leqslant 0$. *Какая часть площади объекта доступна для наблюдения? Ответ выразите в процентах, округленных до целого числа.*

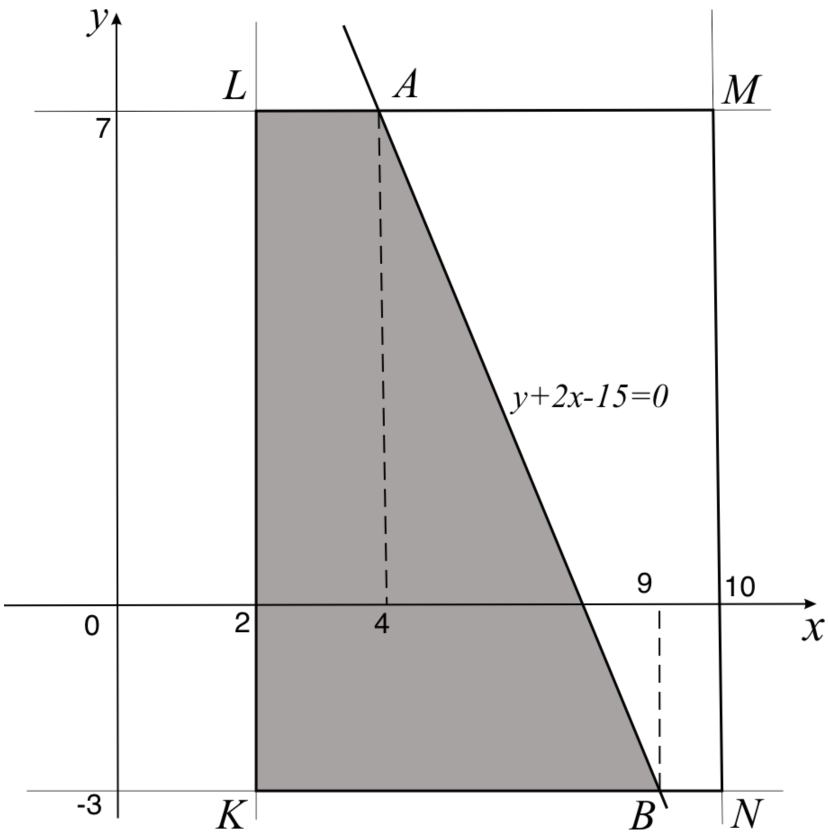
Авторское решение.

Раскрывая модули в неравенстве, получаем

$$\begin{cases} 5x+4y-38+5x-4y-22\leqslant 40, \\ -5x-4y+38-5x+4y+22\leqslant 40, \\ 5x+4y-38-5x+4y+22\leqslant 40, \\ -5x-4y+38+5x-4y-22\leqslant 40, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x\leqslant 10, \\ x\geqslant 2, \\ y\leqslant 7, \\ y\geqslant -3. \end{cases}$$

Таким образом, наблюдаемый объект является прямоугольником с вершинами $K(2, -3)$, $L(2, 7)$, $M(10, 7)$, $N(10, -3)$ (см. рисунок).

Площадь прямоугольника $KLMN$ составляет $S=KL\cdot KN=10\cdot 8=80$.



Условие $y+2x-15\leqslant 0$ определяет полуплоскость. Прямая $y+2x-15=0$ пересекает границу прямоугольника $KLMN$ в точках A и B. Найдем координаты точек A и B. Подставим $x=2$ и $x=10$ в уравнение $y+2x-15=0$. Получим $y=11$ и $y=-5$ соответственно, но ординаты точек границы прямоугольника $KLMN$ удовлетворяют неравенству $-3\leqslant y\leqslant 7$, поэтому прямая $y+2x-15=0$ не пересекает отрезки KL и MN. Подставляя $y=-3$, получим $x=9$, что дает точку пересечения $B(9,-3)$. При подстановке $y=7$, получаем $x=4$ и точку $A(4,7)$. Зона, доступная для наблюдения, является прямоугольной трапецией $KLAB$ (выделена на рисунке).

Площадь трапеции $KLAB$: $S_{KLAB}=\frac{1}{2}KL\cdot(LA+KB)=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot(2+7)=45$.

Итак, для наблюдения доступна часть площади, выражающаяся в процентах по формуле

$$\frac{S_{KLAB}}{S}\cdot 100\%=\frac{45}{80}\cdot 100\%=\frac{225}{4}\%=56{,}25\%\approx 56\%.$$

Ответ: 56%

Типичная ошибка: при нахождении графического образа множества решений неравенства $ax+by+c\leqslant 0$ (или $\geqslant 0$) учащиеся не всегда верно определяют полуплоскость, все точки которой удовлетворяют данному неравенству. Уравнение $ax+by+c=0$ определяет прямую. Если $b\neq 0$, то неравенство $ax+by+c\leqslant 0$ равносильно $y\geqslant -\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ при $b<0$, а это неравенство задает полуплоскость, расположенная *выше* прямой $ax+by+c=0$. При $b>0$ получим $y\leqslant -\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$, т.е. полуплоскость, расположенную *ниже* прямой $ax+by+c=0$. Можно поступить еще проще, а именно, воспользоваться методом пробной точки. Зная, что неравенство определяет одну из двух полуплоскостей, ограниченных прямой $ax+by+c=0$, можно взять произвольную точку, принадлежащую той или другой полуплоскости. Если координаты выбранной точки удовлетворяют неравенству при подстановке, то и вся полуплоскость, в которой лежит выбранная точка, является графическим образом множества решений неравенства. В противном случае решением неравенства является другая полуплоскость.

Отметим, что повышенный уровень этой задачи обусловлен не только необходимостью правильно интерпретировать условие, но и верно определить точки пересечения прямой с границей прямоугольника.

ПРЕДМЕТ «ФИЗИКА»

Задание №5

Контролируемые требования: знание условия излучения электромагнитных волн, шкалы электромагнитных волн, формулы Планка связи энергии фотона с его частотой, энергии и импульса фотона, постулатов Бора, условий излучения и поглощения фотонов при переходе атома с одного уровня энергии на другой; умение находить энергию фотона при излучении или поглощении, классифицировать виды оптического излучения.

Уровень сложности: базовый.

Ответ: вводится в формате «а,бв·10^-г^», где а – первая отличная от нуля цифра числа, а бв – сотые доли после запятой, г – степень десяти.

Оценка: 4 балла за совпадение ответа с эталонным, иначе 0 баллов.

Задача.

Оптический квантовый генератор (лазер) может генерировать электромагнитное излучение на частотах $f_1 = 473{,}083$ ТГц, $f_2 = 260{,}35$ ТГц, $f_3 = 88{,}46$ ТГц. Луч на выходе имеет красный цвет. Определите энергию фотона такого излучения. Мощность излучения лазера 30 Вт, температура окружающей среды 297 К, скорость света в свободном пространстве $3 \cdot 10^8$ м/с, постоянная Планка
$h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с. Ответ округлите до сотых.

Решение: по соотношению длины волны λ, скорости света в свободном пространстве c и циклической частоты колебаний f ($c = \lambda \cdot f$) определяем длину волны излучения $\lambda = \frac{c}{f}$:

$\lambda_1 = 0{,}6328$ мкм, $\lambda_1 = 1{,}1523$ мкм, $\lambda_1 = 3{,}3914$ мкм. В видимый диапазон попадает только длина волны λ_1, которая соответствует красному цвету излучения.

По формуле Планка находим энергию фотона:

$$\boldsymbol{E_1} = h \cdot f_1 = 6{,}626 \cdot 10^{-34} \cdot 473{,}083 \cdot 10^{12} = 3{,}1346 \cdot 10^{-19} \approx \mathbf{3{,}13 \cdot 10^{-19}} \text{ (Дж)}.$$

Возможные ошибки могут возникнуть, если испытуемый плохо ориентируется в разделении по длинам волн диапазонов оптического излучения (ультрафиолетовое, видимое, инфракрасное излучение) или не помнит, как пересчитать длину волны излучения в частоту с помощью скорости света в свободном пространстве.

Задание №6

Контролируемые требования: знание законов сохранения в механике, связи импульса, массы и скорости движущегося тела, способов преобразования системы координат, особенности упругих и неупругих столкновений, умение определять импульс, массу и скорость движущихся тел, применять законы сохранения количества движения для решения поставленных задач, определять законы изменения координат движущегося тела.

Уровень сложности: базовый.

Ответ: вводится в формате «а,б», где а – первая отличная от нуля цифра числа, а б – десятые доли после запятой.

Оценка: 4 балла за совпадение ответа с эталонным, иначе 0 баллов.

Задача.

Космонавт в экипировке, общей массой 95 кг оказался вне корабля и без связи. Чтобы к нему вернуться, пришлось отбросить аппарат для научных измерений массой 5 кг в противоположном направлении по отношению к кораблю. С какой скоростью $\upsilon_а$ улетал предмет, если космонавт направился к своей команде со скоростью $\upsilon_к = 2{,}2$ м/с? Считать движение космонавта и предмета прямолинейным.

Решение: согласно закону сохранения количества движений, их импульсы равны, то есть:

$m_к \cdot \upsilon_к = m_а \cdot \upsilon_а$, отсюда $\upsilon_к = \frac{90 \cdot 2{,}2}{5} = 39{,}6$ м/с.

Возможные ошибки могут возникнуть, если испытуемый не учитывает наличие или отсутствие сил трения и прочих, влияющих на движение тел. Также возможны ошибки в определении проекции скоростей, если движение тел до столкновения и после заданы в различных системах координат.

Задание №9

Контролируемые требования: знание особенностей работы колебательного контура, параметров реактивных элементов электрической цепи, особенностей свободных электромагнитных колебания в идеальном колебательном контуре, формулы Томсона, особенностей вынужденных электромагнитных колебаний, условий резонанса в последовательном и параллельном колебательных контурах; умение находить резонансную частоту колебательного контура по параметрам входящих в его состав элементов, находить параметры электронных элементов по параметрам их конструкции и материалов.

Уровень сложности: повышенный.

Ответ: вводится в формате «а,б», где а – первая отличная от нуля цифра числа, а б – десятые доли после запятой.

Оценка: 8 баллов за совпадение ответа с эталонным, иначе 0 баллов.

Задача.

Колебательный контур содержит катушку индуктивности индуктивностью 2 мкГн и конденсатор емкостью 2 нФ. Контур перенастроили по резонансной частоте за счет изменения емкости плоского конденсатора до значения 2,8 МГц. Известно, что в конденсаторе изменили расстояние между обкладками. Найдите соотношение нового расстояния между обкладками конденсатора к прежнему. Считать потери в контуре за период ничтожно малыми. Результат округлить до десятых.

Решение: согласно формуле Томсона, круговая частота для резонанса $W = 2\pi f = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Отсюда можно определить емкость конденсатора перестроенного контура $C = \frac{1}{4\pi^2 f^2 L}$.

$$\boldsymbol{C} = \frac{1}{4\pi^2 f^2 L} = \frac{1}{4 \cdot 3{,}14^2 \cdot (2{,}8 \cdot 10^6)^2 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} = 1{,}61709 \cdot 10^{-9}\ (\text{Ф}) = \mathbf{1{,}6}\ (\text{нФ})$$

Емкость плоского конденсатора определяется по формуле $\mathrm{C} = \frac{\varepsilon \cdot \varepsilon_{0} \cdot S}{d}$, где d – расстояние между обкладками. Следовательно, соотношение расстояний будет обратно соотношению прежней и новой емкостей $\frac{d_2}{d_1} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{2}{1{,}61709} = 1{,}2$

Возможные ошибки могут возникнуть, если испытуемый плохо помнит формулы для расчета реактивного сопротивления идеализированного конденсатора и катушки индуктивности или не учитывает наличие/отсутствие активных потерь в элементах. Также ошибки могут возникнуть, если не внимательно отнестись к форме задания закона изменения параметров конструкции реактивных элементов во времени или пространстве, что тоже может изменить электрические параметры составляющих контура.

Задача №10

Контролируемые требования: знание особенностей протекания постоянного и переменного тока по элементам электрической цепи, электрические параметры цепей, состоящих из последовательного и параллельного соединения элементов, явления самоиндукции, ЭДС самоиндукции, принципа работы катушек индуктивности и конденсаторов; умение определять сопротивление параллельного и последовательного соединения различных элементов электрической цепи, сопротивление постоянному и переменному току.

Уровень сложности: повышенный.

Ответ: вводится в формате «а,бв», где а – первая отличная от нуля цифра числа, а бв – сотые доли после запятой.

Оценка: 8 баллов за совпадение ответа с эталонным, иначе 0 баллов.

Задача.

Из проволоки длиной 100 м, диаметром 5 мм, сопротивление которой 5 Ом, изготовили катушку индуктивности длиной 50 см. Через нее протекает постоянный ток 10 мА. Параллельно этой катушке индуктивности подключен резистор сопротивлением 10 Ом. Найти сопротивление получившейся цепи. Ответ округлите до сотых.

Решение: несмотря на то, что получился реактивный элемент, ток является постоянным, следовательно, реактивная часть сопротивления $Z_L = j \cdot \omega \cdot L$ будет равна 0. Остается только сопротивление провода, из которого сделана катушка.

При параллельном соединении элементов цепи их проводимости складываются, следовательно, проводимость рассматриваемого участка цепи будет

$G = \frac{1}{R} + \frac{1}{r_L} = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} = 0{,}21$ См. Тогда сопротивление цепи $R_Ц = \frac{1}{G} = 4{,}7619 \approx 4{,}76$ Ом.

Возможные ошибки могут возникнуть, если испытуемый плохо отличает особенности сопротивления проводящих конструкций переменному и постоянному току. Также ошибки могут возникнуть если в сложных соединениях не учитывать распределение потенциала по узлам и координатам.

Список литературы для подготовки

1. Райцин А.М. Элементарная математика: учебное пособие для СПО – Санкт-Петербург: Лань, 2024. - 244 с.

2. Шабунин М.И. Математика: пособие для поступающих в вузы /– 7-е издание, исправленное и дополненное. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2016. – 747 с.

3. Голубев В.И. Решение сложных и нестандартных задач по математике. – М.: ИЛЕКСА, 2007. – 252 с.

4. Горнштейн П.И., Полонский И.Б., Якир М.С. Задачи с параметрами. 3-е издание, дополненное и переработанное. – М.: ИЛЕКСА, 2005. – 328 с.

5. Золотарёва Н.Д., Попов Ю.А., Сазонов В.В., Семендяева Н.Л., Федотов М.В. Алгебра. Углубленный курс с решениями и указаниями: учебно-методическое пособие / Под ред. М.В. Федотова. – М.: Издательство Московского университета, 2011. – 538 с.

6. Ткачук В.В. Математика – абитуриенту. – 14-е изд., исправленное и дополненное. – М.: МЦНМО, 2007. – 976 с.